

Ortogonalidade entre Partições em Caminhos e Partições em Conjuntos Independentes para Digrafos Bipartidos

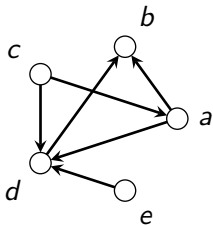
Caroline A. P. Silva Cândida N. Silva Orlando Lee

DComp – UFSCar-So, DComp – UFSCar-So, IC – UNICAMP



- Um digrafo $D = (V(D), A(D))$ é um par de conjuntos $V(D)$ e $A(D)$ onde:
 - $V(D)$ representa o conjunto de vértices de D .
 - $A(D)$ representa o conjunto de arestas de D .
 - Cada aresta em $A(D)$ é um **par ordenado** (u, v) tal que $u, v \in V(D)$.

- Se em um digrafo D , há aresta $(u, v) \in A(D)$ tal que $u, v \in V(D)$ dizemos que u e v são adjacentes.
- Um caminho em um digrafo D é uma sequência de vértices $v_1, v_2, \dots, v_p$ tal que v_i e v_{i+1} são adjacentes para todo i tal que $1 \leq i < p$.
- Um ciclo em um digrafo D é um caminho $P = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ tal que v_1 e v_p são adjacentes.



(a) $D(V, A)$

Figura: Exemplo de digrafo

- $V(D) = \{a, b, c, d, e\}$, $A(D) = \{(a, b), (c, a), (a, d), (d, b), (c, d), (e, d)\}$

Conjunto Independente

Seja D um digrafo

- Um conjunto de vértices $S \subseteq V(D)$ é *independente* em D se para qualquer par de vértices $\{u, v\} \in S$ temos que u e v não são adjacentes.
- Denotaremos a cardinalidade de um conjunto independente máximo de um digrafo D como $\alpha(D)$.

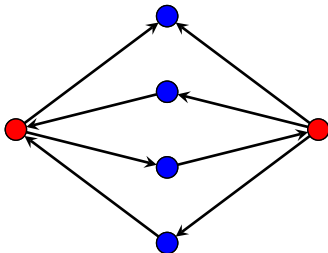


Figura: Exemplo de conjuntos independentes

Digrafo Bipartido

- Um digrafo é bipartido se seu conjunto de vértices pode ser dividido em dois conjuntos X e Y tal que X e Y são conjuntos independentes.

Teorema

Um digrafo D é bipartido se e somente se D não possui ciclo ímpar.

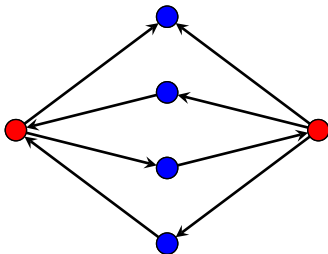


Figura: Exemplo de digrafo bipartido

Emparelhamento

- Um *emparelhamento* em um digrafo D é um subconjunto $M \in A(D)$ tal que, para todo $v \in V(D)$, no máximo um arco de M é conectado a v .
- Denotamos por $\alpha'(D)$ a cardinalidade de um emparelhamento máximo de D .

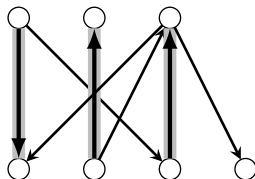


Figura: Exemplo de emparelhamento

Caminho Máximo

- Definimos a *cardinalidade* (ou *tamanho*) de um caminho P , denotada por $|P|$, como sendo o número de vértices do caminho P , ou seja, $|P| = |V(D)|$.
- Denotaremos por $\lambda(D)$ a cardinalidade de um caminho máximo em D .

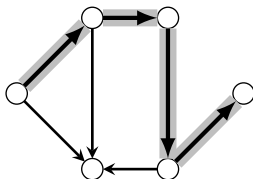


Figura: Exemplo de caminho máximo

Coloração Mínima

- Uma *coloração* $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ de um digrafo D é uma coleção de conjuntos independentes disjuntos, também chamados de *classes de cor*, tais que

$$\bigcup \{C_i : C_i \in \mathcal{C}\} = V(D).$$

- O *número cromático* de D , denotado por $\chi(D)$, é igual à cardinalidade de uma coloração ótima de D .

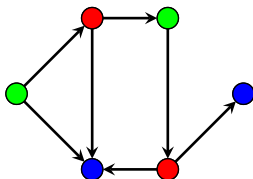


Figura: Exemplo de coloração ótima

Teorema de Gallai (1968) - Roy (1967)

Seja D um digrafo. Então, $\chi(D) \leq \lambda(D)$.

Nova métrica de minimalidade e maximalidade foi estabelecida:

Conjectura Dual de Linial (1981)

Seja D um digrafo. Então, $\chi_k(D) \leq \lambda_k(D)$.

Conjectura Dual de Berge (falsa)

Para toda coloração k -ótima $\mathcal{C}$ de um digrafo D , existe um k -sistema de caminhos $\mathcal{P}^k$ ortogonal à $\mathcal{C}$.

Coloração k -ótima

- Dada uma coloração $\mathcal{C}$ de um digrafo D e um inteiro positivo k , a k -norma de $\mathcal{C}$ é definida como

$$|\mathcal{C}|_k = \sum_{i=1}^m \min\{|C_i|, k\}.$$

- Denotaremos por χ_k a k -norma de uma coloração k -ótima de D .

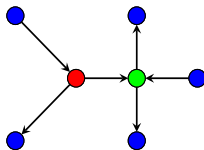
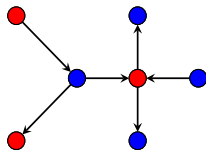
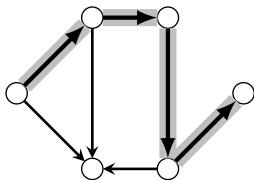


Figura: Exemplos de coloração

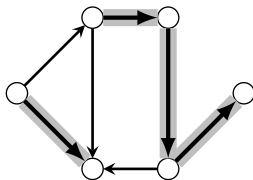
- Um k -sistema de caminhos $\mathcal{P}^k$ de um digrafo D é uma coleção de, no máximo, k caminhos disjuntos nos vértices de D . O peso de $\mathcal{P}^k$ é definido como

$$|\cup_{P \in \mathcal{P}^k} V(P)|.$$

- Denotaremos por λ_k o peso de um k -sistema ótimo de D .



(a) 2-sistema não ótimo

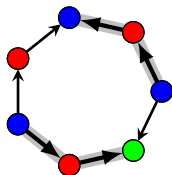


(b) 2-sistema ótimo

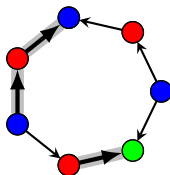
Figura: Exemplos de 2-sistema de caminhos

Ortogonalidade

- Foi proposta uma conjectura mais forte introduzindo o conceito de ortogonalidade.
- Dizemos que uma coloração $\mathcal{C}$ e um k -sistema de caminhos $\mathcal{P}^k$ são *ortogonais* se cada classe de cor $C_i \in \mathcal{C}$ encontra $\min \{|C_i|, k\}$ caminhos diferentes de $\mathcal{P}^k$.



(a) ortogonal



(b) não
ortogonal

Figura: Exemplos de ortogonalidade para $k = 2$

Conjectura Dual de Berge – Contraexemplo

Conjectura Dual de Berge (falsa)

Para toda coloração k -ótima $\mathcal{C}$ de um digrafo D , existe um k -sistema de caminhos $\mathcal{P}^k$ ortogonal à $\mathcal{C}$.

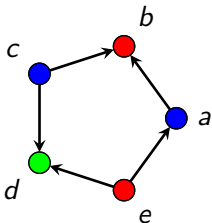


Figura: Contraexemplo para a Conjectura Dual de Berge

Conjectura Dual de Berge para Digrafos Bipartidos

- A solução consiste em encontrar um k -sistema que contém $\min \{\alpha'(D), k\}$ arcos do emparelhamento máximo de D juntos com $k - \alpha(D)$ vértices não pertencentes ao emparelhamento máximo como caminhos triviais, selecionados com algum critério.
- Problema se reduziu a um problema de emparelhamento.
- Orientações não são relevantes!

- Investigamos se a Conjectura Dual de Berge, falsa em geral, seria válida para digrafos bipartidos.
- Conseguimos resposta afirmativa relacionando o problema a um problema de encontrar emparelhamento máximo em digrafos bipartidos.
- Parece difícil generalizar o resultado usando a mesma técnica.