



Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática



Funções Aritméticas e resultados da Teoria Analítica dos Números

Caio Henrique Silva de Souza
João Nivaldo Tomazella (orientador)

13 de novembro de 2019

Funções Aritméticas

Definição

Uma **Função Aritmética** é uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Funções Aritméticas cuidam de propriedades dos números inteiros.

Exemplos de Funções Aritméticas

- $d(n) := \sum_{d|n} 1$ (quantidade de divisores de n);
- $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$ (soma dos divisores de n);
- $\pi(n) := \#\{p \leq n \mid p \text{ é primo}\}$ (quantidade de primos menores ou iguais a n).

Exemplos de Funções Aritméticas

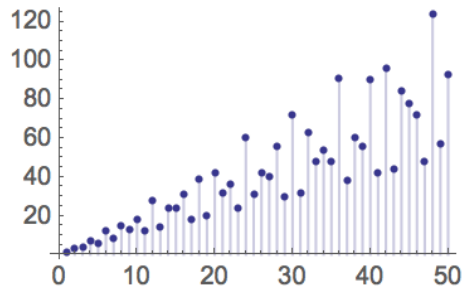
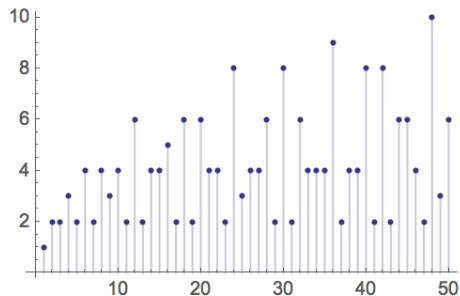


Figura 1: Gráfico das funções $d(n)$ e $\sigma(n)$.

Disponíveis em: <https://reference.wolfram.com/language/ref/DivisorSigma.html>

Aproximando Funções Aritméticas

Temos

- $\sigma(n) = O(n \log(n)).$
- $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma(k) = \frac{\pi^2}{12} n + O(\log(n)).$
- $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(k) = \log(n) + O(1).$

Aproximando Funções Aritméticas

n	$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(k)$	$\log(n)$	n	$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma(k)$	$\frac{\pi^2}{12} n$
5!	5,02	4,79	5!	99,77	98,69
6!	6,75	6,58	6!	593,29	592,18
7!	8,68	8,52	7!	4.146,68	4.145,23
8!	10,76	10,60	8!	33.163,27	33.161,87
9!	12,96	12,80	9!	298.458,33	298.456,83

Tabelas 1 e 2: Comparação entre o valor exato e o valor dado pela fórmula assintótica da média das funções d e σ .

Teorema dos Números Primos

■ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1$ e $\pi(x) = \int_2^x \frac{dx}{\log(x)} + O\left(xe^{-c\sqrt{\log(x)}}\right),$

Este é o chamado **Teorema dos Números Primos**, cuja demonstração foi estudada neste projeto.

x	$\pi(x)$	$x/\log(x)$	$Li(x)$
10^2	25	21,715	30,126
10^4	1.229	1.085,736	1.246,137
10^6	78.498	72.382,414	78.627,549
10^8	5.761.455	5.428.681,024	5.762.209,375
10^{10}	455.052.511	434.294.481,903	455.055.614,586
10^{12}	37.607.912.018	36.191.206.825,271	37.607.950.280,805
10^{14}	3.204.941.750.802	3.102.103.442.166,084	3.204.942.206.569,195

Tabela 3: Comparação entre $\pi(x)$ e suas aproximações.

Referências

-  HLAWKA, E.; SCHOISSENGEIER, J.; TASCHNER, R. Geometric and Analytic Number Theory, Berlim: Springer-Verlag, 1991. 238p.
-  NETO, A. L. Funções de uma variável complexa, 3ª ed, Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 468p.
-  MARTINEZ; MOREIRA; SALDANHA; TENGAN. Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Rio de Janeiro: IMPA, 2010. 450 p.