# GEOMETRIA ESFÉRICA: CONCEITOS BÁSICOS E APLICAÇÕES


**Franciele Santos Teixeira**

**sob orientação do Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella**

Universidade Federal de São Carlos, SP, Brasil

franciele@estudante.ufscar.br



## Resumo

Em um dos textos mais lidos do mundo, Euclides deixa um legado escrevendo axiomas que transformariam a forma de visualizar a matemática da época. Os escritos feitos por Euclides foram considerados como verdade absoluta por muitos anos, porém o quinto postulado ou Postulado das Paralelas deixou duvidas quanto a sua veracidade.

Esse fato, que ficou conhecido como "falha"do quinto postulado de Euclides faz nascer outras geometrias, entre elas a Geometria Esférica, objeto de estudo desse trabalho.

Alguns assuntos discutidos no trabalho foram: um sistema de coordenadas próprio, ângulo entre vetores na esfera, distância esférica, área de uma região esférica e a trigonometria esférica, a utilização do GPS, trigonometria esférica e seus principais teoremas, relacionando-os com a Geometria Euclidiana.

Além do mais, foi trabalhada suas aplicações, na qual se adotarmos a Terra como uma esfera perfeita, os conceitos dessa geometria é de tremenda utilização.

**PALAVRAS-CHAVE:** Geometria Euclidiana, Geometria Esférica, GPS.


## Contexto Histórico

- Em 600 a.C os gregos inseriram a dedução na geometria;
- Euclides se baseou em um modelo axiomático para construir a geometria plana. Através desse modelo, que é composto por 5 axiomas, ele conseguiu deduzir 465 proposições;
- A Geometria Não-Euclidiana é baseada em um sistema axiomático diferente do encontrado na Geometria Euclidiana;
- Gauss enxerga que o postulado das paralelas poderia possibilitar uma outra geometria igualmente lógica e precisa sem a utilização desse postulado.

## Geometria Euclidiana

**Termos indefinidos:** Ponto, Reta, Estar sobre, Estar entre, Congruência.

- **Axiomas de Incidência**
- **Axiomas de Ordem**
- **Axiomas de Congruência**
- **Axioma de Continuidade**
  Segue do último axioma uma das motivações desse estudo.
- **Axioma das Paralelas:** Para qualquer reta $r$ e qualquer ponto $P$ que não está em $r$ existe uma única reta $s$ incidindo em $P$ tal que $s$ é paralela a $r$.

## Geometria Esférica

**Definição 1:**Esfera é um conjunto de pontos no espaço que equidistam $c$ de um ponto fixo $O$ denominado centro da esfera;

**Definição 2:** Seja $S^2_\rho$ a superfície de uma esfera no espaço com raio $\rho$. A interseção de $S^2_\rho$ com um plano através de seu centro é denominado de círculo máximo.

Ainda podemos ressaltar algumas propriedades presentes nessa geometria.

1. Dois pontos não determinam necessariamente uma única reta;
2. As retas na esfera possuem comprimento finito;
3. Não existem retas paralelas na Geometria Esférica.

## Principais Definições e Teoremas

**Coordenadas Esféricas:** Seja $P = (x, y, z)$ tal que $P \in S^2_\rho$, $O$ a origem da esfera e $\rho = \overline{OP}$. Assim,

$$sen(\beta) = \frac{z}{\rho} \Rightarrow z = \rho sen(\beta)$$
$$cos(\beta) = \frac{w}{\rho} \Rightarrow w = \rho cos(\beta)$$
$$sen(\alpha) = \frac{y}{w} \Rightarrow y = \rho sen(\alpha) cos(\beta)$$
$$cos(\alpha) = \frac{x}{w} \Rightarrow x = \rho cos(\alpha) cos(\beta).$$

1. $\gamma$ é o ângulo entre a parte positiva do eixo $Oz$ e o vetor $\overrightarrow{OP}$;
2. $\alpha$ é o ângulo entre a parte positiva do eixo $Ox$ e vetor da projeção de $\overrightarrow{OP}$, vetor $\overrightarrow{OP'}$, no plano $Oxy$, será denominado que $||\overrightarrow{OP'}|| = w$;
3. $\beta$ é o angulo entre o vetor $\overrightarrow{OP}$ e o vetor da projeção $\overrightarrow{OP'}$
4. nota-se também que $\rho \geq 0$ e $0 \leq \gamma \leq \pi$.

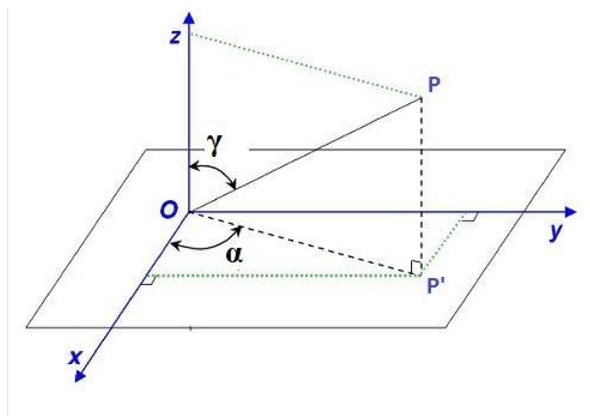


**Figura 1:** Sistema de coordenadas

**Distância Esférica:** Sejam $A$ e $B$ dois pontos em $S^2_\rho$. Então a $dist(A, B)$ entre $A$ e $B$ é o menor comprimento entre os dois arcos do círculo máximo que passa por $A$ e $b$. Assim:

$$dist(A, B) = \arccos\left(\frac{A \cdot B}{\rho^2}\right)$$

onde $A \cdot B = ||A|| \cdot ||B|| \cdot \cos(\theta)$, onde $\theta$ é o ângulo formado entre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

**Triângulo Esférico:** Se três pontos $A$, $B$ e $C$ estão contidos em um mesmo grande círculo tem-se que $A$, $B$ e $C$ definem pontos na mesma região da superfície limitada pelas geodésicas. Essa região é chama de triângulo esférico com vértices $A$, $B$ e $C$.

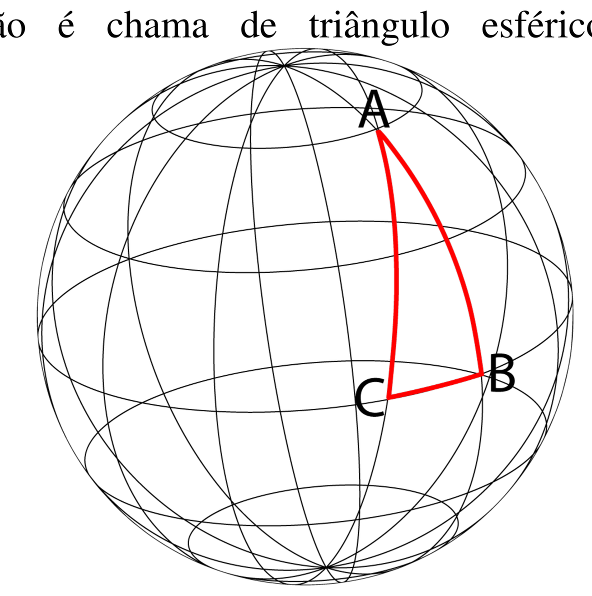


**Figura 2:** Triângulo Esférico

**Teorema de Pitágoras Esférico:** Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico sobre $S^2_\rho$ com um ângulo reto no vértice $A$ e o lado oposto medindo $a$. Se os comprimentos dos lados opostos aos vértices $B$ e $C$ medem $b$ e $c$, respectivamente, então

$$\cos\left(\frac{a}{\rho}\right) = \cos\left(\frac{b}{\rho}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{\rho}\right)$$

### Geometria Esférica e o uso do GPS

O GPS permite a qualquer pessoa que o use saber a sua localização em qualquer horário do dia e sob quaisquer condições atmosféricas em qualquer local da Terra.

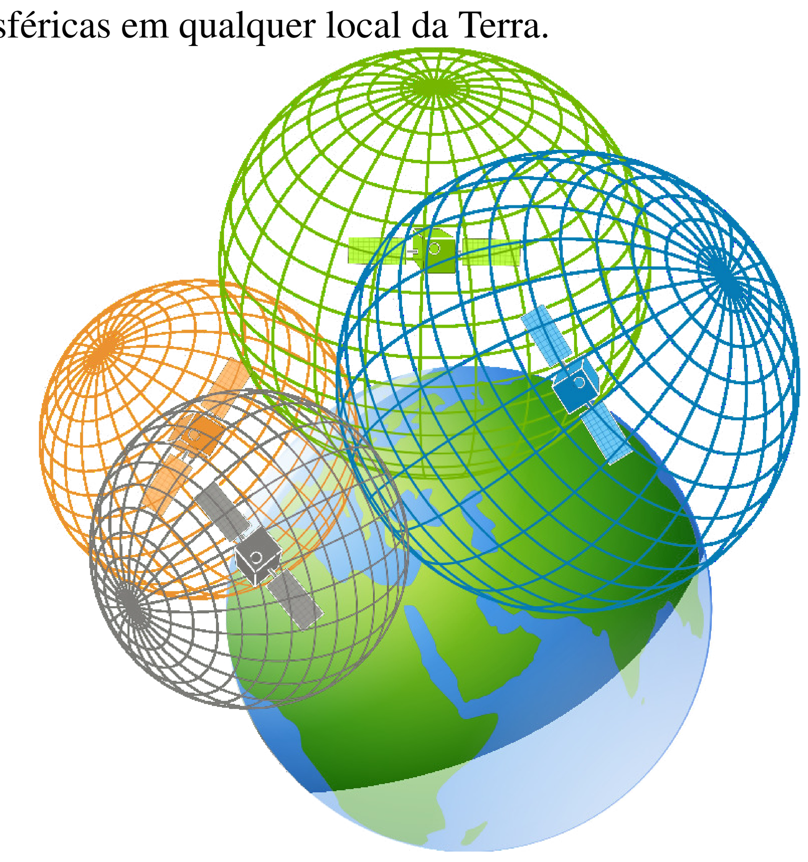

**Figura 3:** GPS e satélites
Fonte: https://www.gratispng.com/png-8fbs0u/

**Teorema 3:** Sejam $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ quatro superfícies esféricas em que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ se os centros dessas esferas não são coplanares, então elas possuem apenas um ponto em comum.


## Referências bibliográficas

FABER, Richard L..Pure and applied Mathematics: Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry. Berkeley: Mdi, 1983. 329 p..

SILVA, Welder Dan. Uma introdução à Geometria Esférica. 2015. 47 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática - Igce/unesp, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2015.

SALEMA, Ricardo Lagreca. Das cordas ao GPS: Um estudo sobre a Geometria Esferica. 2018. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Mestrado Profissional, Rio de Janeiro, 2018.